Soluție

1. a) $\det(A) = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$ sau

$\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) Deoarece $\det(A) = 0$ şi $a+b+c \neq 0$, rezultă $a = b = c$.

c) Determinantul matricei sistemului $\begin{vmatrix} 2a-1 & 2b & 2c \\ 2c & 2a-1 & 2b \\ 2b & 2c & 2a-1 \end{vmatrix}$ este o sumă de 5 termeni pari şi unul impar,

deci este un număr impar şi, în consecință, nenul.

2. a) Folosind relațiile lui Viéte, se obține $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0$.

b) Notând $x^2 = t$ obținem ecuația $t^2 - 5t + 5 = 0$, cu soluțiile $t_{1,\,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$, deci ecuația inițială are toate rădăcinile reale.

c) Dacă $\text{grad}(g) > 4$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$, dar din ipoteză rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \leq 1$, contradicție.

În consecință, $\text{grad}(g) \leq 4$. Din ipoteză deducem că $\forall\, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $|g(x_k)| \leq |f(x_k)| = 0$, deci $|g(x_k)| = 0$, de unde rezultă $g(x_k) = 0$, adică $g = a \cdot f$, cu $a \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relația din enunț, obținem că $|a| \leq 1$. Aşadar, soluțiile sunt polinoamele $g = a \cdot f$, cu $a \in [-1, 1]$.